

Численное моделирование распространения света через диффузор

А. В. ДМИТРИЕВ, А. В. ИВАНОВ, А. Р. ХОХЛОВ

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: dmitriev@lt.phys.msu.su

УДК 538.935+517.958+537.84

Ключевые слова: численное моделирование, метод стохастического аналога, мутные среды, диффузор, уравнение переноса излучения, малугловое диффузионное приближение.

Аннотация

Диффузоры являются важным элементом систем подсветки различных устройств: дисплеев, рекламных панелей и т. д. С точки зрения оптики материал диффузора, подобный молочному стеклу, представляет собой мутную среду. В данной работе прохождение излучения через диффузор с оптически мягкими сферическими включениями описывается уравнением типа Фоккера—Планка, т. е. уравнением переноса с диффузионным членом в пространстве направлений распространения излучения. Коэффициент угловой диффузии вычисляется на основе теории Ми. Уравнение решается численно методом стохастического аналога, в результате расчётов определяется пространственно-угловое распределение прошедшего через диффузор излучения. Результаты могут быть использованы для нахождения оптимальных параметров диффузора, а предложенный метод может быть с успехом применён для решения других задач оптики мутных сред с оптически мягкими рассеивающими частицами.

Abstract

A. V. Dmitriev, A. V. Ivanov, A. R. Khokhlov, Numerical simulation of light propagation through a diffuser, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 6, pp. 33–41.

Diffusers are important elements of many illumination systems, for example, in computer and mobile phone displays or advertising panels, etc. In this article, the light propagation in a diffuser with optically soft inclusions is described with the help of the Fokker—Planck equation, i.e., a transfer equation with a diffusion term in the space of radiation propagation directions. The coefficient of angle diffusion is calculated using the Mie theory. The equation is solved numerically using the stochastic analog method, and the space and angle distribution of the radiation that passed through the diffuser is calculated. The results can be useful for diffuser parameters optimization, and the method can be applied to many problems of turbid media with optically soft particles.

Как правило, для освещения изображений на просвет используются источники света, размер которых гораздо меньше размера самого изображения. Поскольку обычно желательно, чтобы освещение было тем не менее однородным, между источником света и изображением помещают те или иные устройства,

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 6, с. 33–41.

© 2009 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

которые это обеспечивают. В фото-, кино- и другой проекционной аппаратуре для этого используются линзовые конденсоры. Что же касается таких компактных приборов, как жидкокристаллические дисплеи телевизоров, компьютеров и мобильных телефонов, то в них вместо конденсора используется так называемый диффузор. Диффузор чаще всего состоит из одного или нескольких слоёв прозрачного материала: стекла или пластика, в каждом из которых в той или иной концентрации содержатся микроскопические частицы другого вещества, на которых рассеивается свет. Размеры этих частиц обыкновенно сравнимы с длиной световой волны. Диффузоры применяются и в рекламных щитах, освещаемых на просвет люминесцентными лампами. В них в качестве диффузора обычно используется просто лист молочного стекла (плексигласа), расположенный между лампами и изображением и сглаживающий неоднородность освещения последнего.

При всей видимой простоте устройства диффузор должен удовлетворять ряду требований, которые могут противоречить друг другу или быть для разных устройств совершенно различными. Так, чтобы хорошо выравнять освещённость, диффузор должен быть оптически плотным, а чтобы не снижать уровень освещённости изображения, наоборот, максимально прозрачным. В устройствах рекламы и телевизорах диффузоры должны обеспечивать возможность видеть изображение с всевозможных направлений, тогда как изображения на экранах банкоматов и ноутбуков бизнес-класса должны быть видны только тому, кто находится прямо перед ними. Таким образом, необходимо иметь возможности изготавливать диффузоры с совершенно разными характеристиками, и поэтому моделирование распространения света в диффузоре имеет важное практическое значение.

Однако с научной точки зрения такая задача принадлежит к одному из самых сложных разделов оптики: оптике мутных сред. Мутной средой называется однородное и прозрачное вещество-матрица, содержащее частицы другого вещества, рассеивающие свет. Простейшим примером может служить туман: совокупность мелких водяных капель в воздухе. Вещество диффузора тоже мутная среда. Для описания распространения света в мутных средах применяется так называемое уравнение переноса излучения [1, 9, 11, 13], общих аналитических методов решения которого не существует; численному решению оно тоже поддётся с трудом.

Имея в виду рассматриваемую задачу с неоднородным распределением излучения в трёхмерном пространстве, уравнение переноса удобно записать в виде [9]

$$\frac{1}{c_m} \frac{\partial I(t, \mathbf{n}, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{n} \nabla I(t, \mathbf{n}, \mathbf{r}) = \frac{1}{l_{sc}} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} x(\gamma) I(t, \mathbf{n}', \mathbf{r}) - \frac{1}{l_{ex}} I(t, \mathbf{n}, \mathbf{r}). \quad (1)$$

Здесь I — интенсивность света, t — время, \mathbf{r} — пространственная координата, c_m — скорость света в веществе-матрице, \mathbf{n} и \mathbf{n}' — единичные векторы направления распространения излучения, интегрирование идёт по всем \mathbf{n}' , $x(\gamma)$ — индикатриса рассеяния (вероятность рассеяния света в определённом направлении),

γ — угол между \mathbf{n} и \mathbf{n}' . Параметры l_{sc} и l_{ex} — длины поглощения и экстинкции:

$$l_{sc} = \frac{1}{N\sigma_{sc}}, \quad l_{ex} = \frac{1}{N\sigma_{ex}},$$

где N — концентрация рассеивающих свет частиц (включений в веществе диффузора), σ_{sc} и σ_{ex} — сечения поглощения и экстинкции для одной частицы. Частота света входит в уравнение как параметр, который влияет на форму индикатрисы рассеяния, на скорость света в среде и на сечения.

Уравнение переноса излучения представляет собой сложное интегродифференциальное уравнение в шестимерном пространстве, координатами которого являются время, две компоненты вектора \mathbf{n} и три компоненты вектора \mathbf{r} , или в пятимерном пространстве, если рассматривается стационарная ситуация. Эффективные методы его решения в пространственно неоднородном случае отсутствуют.

Но если показатели преломления частиц-рассеивателей мало отличаются от показателя преломления среды (оптически мягкие включения), что как раз имеет место во многих промышленно производимых диффузорах, то уравнение переноса может быть упрощено с помощью метода, разработанного В. В. Соболевым [8, 9] и часто называемого малоугловым диффузионным приближением.

Предложенный В. В. Соболевым метод основан на том, что поскольку коэффициент преломления оптически мягкого включения незначительно отличается от коэффициента преломления среды, то рассеяние света на такой частице приводит только к небольшому отклонению луча от первоначального направления, так что индикатриса рассеяния представляет собой узкий пик вокруг направления падающего света. Чем «мягче» рассеиватели, тем уже становится индикатриса, и в предельном случае исчезающе малой разницы показателей преломления рассеивателя и среды индикатриса стремится к дельта-функции от угла рассеяния. Это означает, что для оптически мягких рассеивателей среднее изменение направления распространения светового луча в одном элементарном акте рассеяния мало, так что для полной релаксации падающего луча по направлению распространения требуется множество актов рассеяния. Это характерный признак так называемых медленных процессов [3], которые могут быть описаны дифференциальным уравнением Фоккера—Планка [3, 7] вместо исходного более сложного интегрального уравнения. Применительно к уравнению переноса излучения переход к уравнению Фоккера—Планка может быть осуществлён следующим образом [8, 9].

Поскольку индикатриса рассеяния имеет форму узкого пика, разница между направлениями векторов \mathbf{n} и \mathbf{n}' мала, и следовательно, мала разность между интенсивностями $I(\mathbf{n})$ и $I(\mathbf{n}')$, так что вместо второй из них можно использовать её разложение в ряд по степеням $\theta' - \theta$ и $\varphi' - \varphi$ относительно \mathbf{n} , где θ и φ — углы, задающие направление вектора \mathbf{n} , а θ' и φ' — такие же углы \mathbf{n}' . Как обычно в теории уравнения Фоккера—Планка [3, 7], в разложении достаточно ограничиться членами до второго порядка, пренебрегая третьей и более высокими степенями. Подстановка получившегося разложения в интеграл в правой части уравнения

переноса даёт следующий результат:

$$\int \frac{d\Omega'}{4\pi} x(\gamma) I(t, \mathbf{n}', \mathbf{r}) = I(t, \mathbf{n}, \mathbf{r}) + D \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial I}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi^2} \right],$$

где первое слагаемое в правой части возникает из нулевого члена тейлоровского разложения при учёте условия

$$\int \frac{d\Omega'}{4\pi} x = 1,$$

члены первого порядка исчезают в результате интегрирования, а члены разложения второго порядка дают слагаемые со вторыми производными I . Стоящий перед ними коэффициент D — второй угловой момент индикатрисы рассеяния:

$$D = \frac{1}{8} \int_0^\pi d\gamma x(\gamma) \sin^3 \gamma.$$

Слагаемые со вторыми производными описывают диффузионное движение направления распространения света в пространстве углов, а D имеет смысл коэффициента угловой диффузии за счёт рассеяния на включениях в среде. В работах В. В. Соболева [8,9] было показано, что коэффициент диффузии по углам может быть также выражен через x_1 , первый коэффициент разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра:

$$D = \frac{1}{6}(3 - x_1), \quad x_1 = \frac{3}{2} \int_0^\pi d\gamma x(\gamma) \cos \gamma \sin \gamma. \quad (2)$$

Именно эти соотношения используются в данной работе для нахождения D .

С помощью известных выражений для дифференциальных операторов в сферической системе координат [6] можно переписать дифференциальные члены в правой части получившегося уравнения переноса в более компактной векторной форме

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial I}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi^2} = -\operatorname{div}([\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \operatorname{grad}]]I) = -\nabla \cdot ([\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \nabla]]I),$$

которая позволяет окончательно записать это уравнение в виде уравнения Фоккера—Планка в пространстве углов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_m} \frac{\partial I(t, \mathbf{n}, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{n} \nabla_r I(t, \mathbf{n}, \mathbf{r}) + \left(\frac{1}{l_{\text{ex}}} - \frac{1}{l_{\text{sc}}} \right) I(t, \mathbf{n}, \mathbf{r}) = \\ = -\frac{D}{l_{\text{sc}}} \nabla_n \{ [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \nabla_n]] I(t, \mathbf{n}, \mathbf{r}) \}. \end{aligned}$$

Мы имеем теперь дифференциальное уравнение вместо исходного интегродифференциального, и оно может быть решено эффективным численным методом стохастического аналога, который представляет собой один из вариантов метода Монте-Карло.

Полученное уравнение решается внутри слоя, ограниченного плоскостями $r_z = 0$ и $r_z = L_z$. На границах слоя учитываются закон Снелла, полное внутреннее отражение и частичное отражение, описываемое формулами Френеля. Вне слоя используется геометрическая оптика. Включения в слое считаются сферическими с гамма-распределением по размерам [9, 12]. Индикатриса рассеяния на них, необходимая для вычислений коэффициента угловой диффузии по формулам (2), рассчитывается в соответствии с теорией Ми [2, 10, 14].

В данной задаче нас интересует стационарная ситуация. Установившееся решение уравнения переноса ищется методом стохастического аналога [4, 5]. Для этого выбираются лучи со случайными направлениями, исходящие от источника света и распространяющиеся затем сквозь систему, испытывая рассеяние и отражение с соответствующими вероятностями. Точка выхода лучей из диффузора регистрируется вместе с направлениями, по которым они распространяются после выхода, и на основе того и другого строится пространственное и угловое распределение излучения на поверхности диффузора. Интенсивность выходящего света пропорциональна при этом пространственной функции распределения лучей на обращённой к наблюдателю поверхности диффузора. Угловое распределение лучей используется для нахождения угловой структуры интенсивности прошедшего света с пространственным разрешением.

Заметим, что при этом подходе легко учитываются отражение и преломление света на границе, в том числе и внутренние отражения, что выгодно отличает его от часто используемого метода удвоения. Пригодность метода для изучения пространственно неоднородных систем и возможность непосредственного получения пространственно разрешённых характеристик прошедшего через диффузор излучения тоже являются его преимуществами.

Численная схема для одной траектории имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k + h c \mathbf{n}_k, \\ \mathbf{n}_{k+1} &= R \left(R(\mathbf{n}_k, 2\pi\alpha_{3k}) \frac{\mathbf{i}_k \times \mathbf{n}_k}{|\mathbf{i}_k \times \mathbf{n}_k|}, 2\sqrt{-2hD \ln \alpha_{3k+1}} \cos 2\pi\alpha_{3k+2} \right) \mathbf{n}_k, \end{aligned}$$

где k — номер временного слоя, h — шаг по времени, \mathbf{i}_k — орт, соответствующий минимальной компоненте вектора \mathbf{n}_k , $\{\alpha_j\}$ — последовательность случайных чисел, равномерно распределённая в интервале $(0, 1)$, $R(\mathbf{o}, \delta)$ — матрица поворота вокруг единичного вектора \mathbf{o} на угол δ по правилу правого винта:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{o}, \delta) &= \\ &= \begin{bmatrix} (o_x^2 - o_y^2 - o_z^2) \sin^2 \frac{\delta}{2} + \cos^2 \frac{\delta}{2} & 2 \sin \frac{\delta}{2} (o_x o_y \sin \frac{\delta}{2} - o_z \cos \frac{\delta}{2}) & 2 \sin \frac{\delta}{2} (o_x o_z \sin \frac{\delta}{2} + o_y \cos \frac{\delta}{2}) \\ 2 \sin \frac{\delta}{2} (o_x o_y \sin \frac{\delta}{2} + o_z \cos \frac{\delta}{2}) & (o_y^2 - o_x^2 - o_z^2) \sin^2 \frac{\delta}{2} + \cos^2 \frac{\delta}{2} & 2 \sin \frac{\delta}{2} (o_y o_z \sin \frac{\delta}{2} - o_x \cos \frac{\delta}{2}) \\ 2 \sin \frac{\delta}{2} (o_x o_z \sin \frac{\delta}{2} - o_y \cos \frac{\delta}{2}) & 2 \sin \frac{\delta}{2} (o_y o_z \sin \frac{\delta}{2} + o_x \cos \frac{\delta}{2}) & (o_z^2 - o_x^2 - o_y^2) \sin^2 \frac{\delta}{2} + \cos^2 \frac{\delta}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для расчёта функции распределения на поверхности диффузора в области $[-L_x/2, L_x/2] \times [-L_y/2, L_y/2]$ задаётся прямоугольная равномерная сетка размерами $N_x \times N_y$ ячеек. В каждой ячейке для построения угловой функции распределения используется изотропная сетка, представляющая собой многогранник,

вписанный в сферу единичного радиуса. Каждая его грань представляет собой треугольник, близкий к правильному. Основой для построения сетки служит додекаэдр, каждая грань которого разбита на пять одинаковых почти правильных треугольников (всего 60 граней). При необходимости сферическая сетка может быть измельчена до нужной степени рекурсивным дроблением каждого треугольника на четыре. Всего сферическая сетка имеет $60 \cdot 4^r$ ячеек, где r — число проведённых дроблений. Угловая функция распределения может быть отображена при помощи специальной просмотровой программы или спроектирована на плоскость с использованием преобразования, аналогичного используемому при построении географических карт:

$$y = 1 - \frac{2\theta}{\pi}, \quad x = \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right) (1 - y^2),$$

где φ, θ — углы в сферической системе координат, x, y — координаты на плоскости.

Кроме того, рассчитывалась диаграмма интенсивности, усреднённой по азимутальному углу φ , как функция полярного угла θ для области диффузора $x^2 + y^2 < r_\theta^2$ и на равномерной сетке $\theta \in [0, \pi]$ с N_θ ячейками. Наконец, рассчитывался коэффициент пропускания диффузора I_{eff} , показывающий, какая доля падающего света прошла насквозь через диффузор.

Чтобы получить результат с приемлемой точностью, необходимо набрать достаточно большую статистику. Число N лучей, использованных при вычислениях, должно значительно превосходить количество ячеек, служащих для расчёта функции распределения: $N \gg N_x N_y \cdot 60 \cdot 4^r$. Заметим ещё, что, так как световые лучи при своём распространении в диффузоре постепенно затухают за счёт постоянного рассеяния, не имеет смысла проследивать их на слишком продолжительном пути; мы использовали лучи максимальной длины

$$l_{\text{max}} \sim (20 \div 100)L_z.$$

Численная схема была реализована в виде высокопроизводительного программного комплекса, написанного на языках программирования C++, Python и Fortran для операционной системы Linux и снабжённого интуитивно понятным интерфейсом, обеспечивающим запуск, продолжение и разветвление вычислений, наглядное представление полученных результатов и их запись в распространённых графических форматах eps и gif. Результаты вычислений сохраняются также в численной форме в файле специального формата.

На рисунках 1—4 представлены результаты, полученные при моделировании с помощью описанного программного комплекса распространения света в диффузоре из плексигласа с включением микроскопических частиц кварцевого стекла.

Развитый метод и реализующий его программный комплекс могут быть использованы как для расчёта оптимальных оптических и геометрических параметров диффузоров, так и для моделирования прохождения излучения через различные мутные среды со сложными, в том числе и шероховатыми, границами.

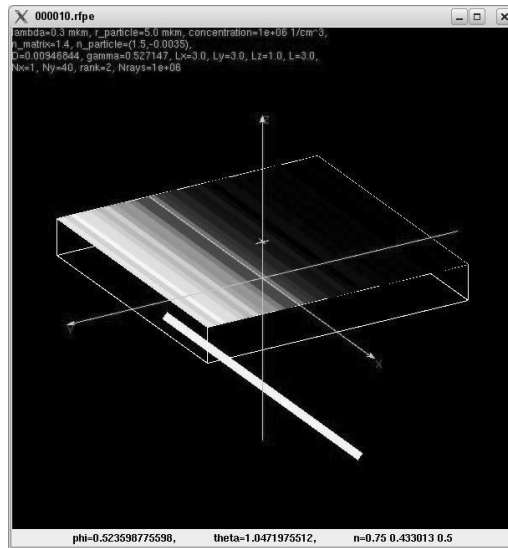


Рис. 1. Интенсивность излучения, идущего в направлении на наблюдателя с поверхности диффузора, освещенного линейным источником света, находящимся под его серединой (показан яркой полосой внизу)

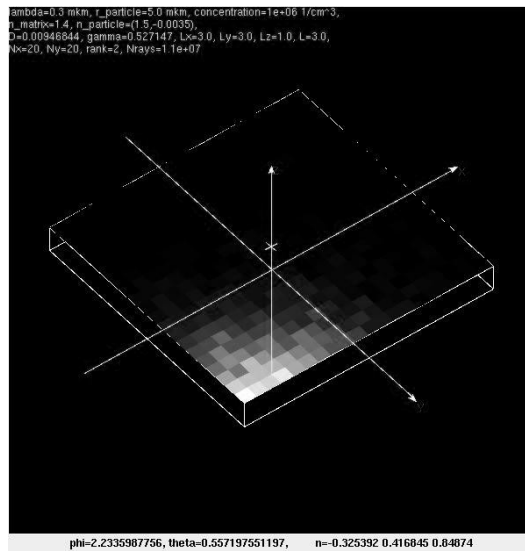


Рис. 2. Интенсивность излучения, идущего в направлении на наблюдателя с поверхности диффузора, освещенного точечным источником, находящимся под его серединой (не виден)

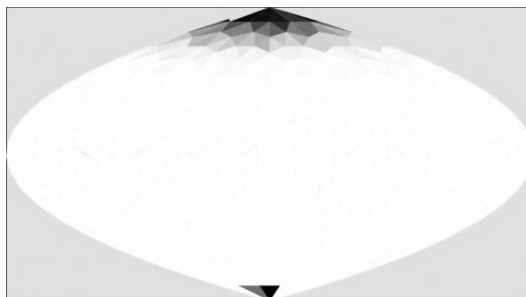


Рис. 3. Угловое распределение излучения в центре диффузора, освещённого точечным источником света. Вверху — интенсивность прошедшего через диффузор света, внизу видно излучение, отражённое от нижней поверхности диффузора

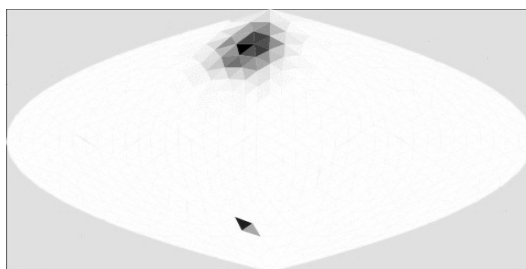


Рис. 4. Угловое распределение излучения на краю диффузора, освещённого точечным источником света. Виден прошедший (вверху) и отражённый (внизу) свет

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009—2013 годы» (контракт № П-2312).

Литература

- [1] Апресян Л. А., Кравцов Ю. А. Теория переноса излучения. Статистические и волновые аспекты. — М.: Наука, 1983.
- [2] Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. — М., 1986.
- [3] Дмитриев А. В. Основы статистической физики материалов. — М.: Изд-во Моск. ун-та; Наука, 2004.
- [4] Змиевская Г. И. Численные стохастические модели неравновесных процессов // Мат. моделирование. — 1996. — Т. 8, № 11. — С. 3—40.
- [5] Иванов А. В. Кинетическое моделирование динамики магнетиков // Мат. моделирование. — 2007. — Т. 19, № 10. — С. 89—104.
- [6] Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике. — М., 1981.
- [7] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. — М.: Физматлит, 2001.

- [8] Соболев В. В. ДАН СССР. — 1967. — Т. 177, № 4. — С. 812—815.
- [9] Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. — М.: Наука, 1972.
- [10] Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.
- [11] Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. — М., 1953.
- [12] Babenko V. A., Astafyeva L. G., Kuzmin V. N. Electromagnetic Scattering in Disperse Media. — Berlin: Springer, 2003.
- [13] Mishchenko M. M., Davis L. D., Lacis A. A. Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles. — Cambridge University Press, 2002.
- [14] Wiscombe W. J. Improved Mie scattering algorithms // Appl. Optim. — 1980. — Vol. 19. — P. 1505—1509.

